Հոյնի ֆունկցիաներ և Պենլևեի տրանսցենդենտներ. կիրառություններ ֆիզիկայում և մաթեմատիկայում

21AG-1C064

Արթուր Իշխանյան

Ընդհանուր դիտարկումներ

- Հոյնի հինգ ֆունկցիաները (Հոյնի ընդհանուր ֆունկցիան և դրա չորս վերասերումները)
- Պենլևեի վեց տրանսցենդենտները (ֆունկցիաները)
- Ներկայում լայնորեն հանդիպում են ժամանակակից դասական և ոչ դասական ֆիզիկայի, մաթեմատիկայի, ճարտարագիտության, տեխնոլոգիայի, քիմիայի, կենսաբանության, ֆինանսների և այլ ոլորտներում:
- Թեպետ այս ֆունկցիաներն ուսումնասիրվել են շատ հեղինակների կողմից, այնուհանդերձ, տեսությունը դեռևս էական բարելավման կարիք ունի:
- «Դժվարությունները, որոնց հանդիպում ենք Հոյնի հավասարումներին առնչվելիս, առնվազն մեկ կարգով ավելին են, քան այն, ինչին բախվում ենք հիպերերկրաչափական հավասարումների դեպքում» (F.M. Arscott, *Introduction*, in *Heun's Differential Equations*):
- Հոյնի ֆունկցիաների դեպքում առաջխաղացման համար մենք կիրառելու ենք մեր կողմից մշակված մի նոր մոտեցում, որի հիմքում ընկած է այն, որ առկա *օժանդակ* պարամետրը դիտարկվում է որպես որոշակի թաքնված եզակիության բնութագիր:
- Պենլևեի տրանսցենդենտների դեպքում մեր մոտեցումը հիմնված է *դեֆորմացված-Հոյն–Պենլևե-հավասարում* անցման վրա [J. Dereziński, A. Ishkhanyan, and A. Latosiński, "From Heun class equations to Painlevé equations", SIGMA **17**, 056 (2021)]:
- Մենք կօգտագործենք նոր վերլուծությունները կիրառական մաթեմատիկայի, քվանտային ֆիզիկայի, ատոմային, մոլեկուլային և օպտիկական ֆիզիկայի, վիճակագրական ֆիզիկայի, աստղաֆիզիկայի և տիեզերաբանության ոլորտների մի շարք խնդիրներում:
- Կառուցված վերլուծությունները համակարգչային հանրահաշվական համակարգերում (Mathematica, Maple) ներառելը հանդիսանում է այս նախագծի ևս մեկ կարևոր ուղղություն:

Հետազոտական ծրագիրը

- **Հոյնի ֆունկցիաների վերլուծությունները շարքերով**
- ***Ֆիզիկական խնդիրների* հետազոտում Հոյնի և Պենլևեի ֆունկցիաների կիրառմամբ**
- C1 *Քվանտային երկվիճակ խնդիր* (ատոմային մոլեկուլային և օպտիկական ֆիզիկա)
- C2 *Ճշգրիտ լուծվող քվանտամեխանիկական մոդելներ* (քվանտային մեխանիկա)
- C3 *Դիրակյան նյութեր* (ցածր-չափողականության ֆիզիկա)
- C4 *Դիրքից կախված զանգվածով խնդիրը* (քվանտային ֆիզիկա)
- C5 *Մակերևութային պլազմոն-պոլարիտոն* (մակերևույթի ֆիզիկա)
- *C6 Ոչգծային նյութական ալիքների քվանտային անցումը նանոկառուցվածքներով* (նյութական ալիքներ, այլասերված քվանտային գազեր)
- C7 *Ոչգծային քվանտային երկվիճակ խնդիր* (ոչ գծային ֆիզիկա, այլասերված քվանտային գազեր)
- C8 *Սև խոռոչների ֆիզիկա* (աստղաֆիզիկա)
- C9 *Նեյտրինոյի տատանումներ* (տարրական մասնիկների ֆիզիկա)
- C10 *Տիեզերքի մեծամասշտաբ կառուցվածքը* (տիեզերաբանություն)
- **Հոյնի և Պենլևեի ֆունկցիաները *կիրառական մաթեմատիկայում***
- B1. *Լոգիստական արտապատկերում (logistic map)*
- B2. *Բացառիկ օրթոգոնալ բազմանդամներ (exceptional orthogonal polynomials)*
- B3. *Պենլևեի հավասարումների ռացիոնալ լուծումներ*

Միջազգային համագործակցություն

Vladimir Pavlovich Krainov

- Ունիվերսալ տիպի ֆիզիկոս է (Լև Լանդաուի դպրոցի ներկայացուցիչ, Միգդալի աշակերտ)
- Հեղինակել է 450-ից ավել հոդված (ամենավերջին երեքը մեզ հետ համահեղինակությամբ)
- Հեղինակ կամ համահեղինակ է 20-ից ավել մենագրությունների, որոնք քաջ հայտնի են աշխարհում
- Ունենք 30 համատեղ հոդված և 20 համատեղ ներկայացում միջազգային գիտաժողովներում վերջին 10 տարում
- Պրոֆ. Կրայնովը և ես մեր խմբի մի երիտասարդ գիտնականի թեկնածուական ատենախոսության համաղեկավարներն էինք
- Խմբի մեկ այլ երիտասարդ անդամ ստացել է բակալավրի, մագիստրոսի և ֆ.մ.գ.թ. աստիճաններ Մոսկվայի ֆիզիկատեխնիկական ինստիտուտում իր ղեկավարությամբ:
- Ունեցել ենք մի քանի համատեղ գիտական դրամաշնորհ (օր.՝ 18RF-139, 20RF-171)
- Պարբերաբար այցելում է Հայաստան, մասնակցում գիտաժողովների և սեմինարներ անցկացնում հայկական հետազոտական կենտրոններում

Խմբի անդամները

Մարիամ Գևորգյան, PhD 2016

Արամայիս Հարությունյան, PhD 2018

Վահե Մանուկյան, PhD 2018

Տիգրան Իշխանյան, PhD 2019

Գայանե Պետրոսյան, PhD 2011

Աստղիկ Ղազարյան, կրտսեր գիտաշխատող

Մերի Մարգարյան, 3-ին կուրսի ասպիրանտ

Սենյակները վերանորոգված են, հագեցված են տեխնիկայով,
խմբի բոլոր անդամներն ունեն անհատական դյուրակիր համակարգիչներ

Հրապարակումներ-1

1. A. Lupica, C. Cesarano, F. Crisanti, and A. Ishkhanyan, "Analytical solution of the three-dimensional Laplace equation in terms of linear combinations of hypergeometric functions", Mathematics **9**, 3316 (2021).
2. A.M. Ishkhanyan and V.P. Krainov, "Calculation of the photorecombination spectrum when atoms irradiated by a strong laser field based on the Markov approximation", Optics and Spectroscopy **130**, 42-44 (2022).
3. A.M. Ishkhanyan and V.P. Krainov, "Qualitative consideration of the Scharnhorst effect", JETP Letters **115**, 368-370 (2022).
4. F. Crisanti, C. Cesarano, and A. Ishkhanyan, "The Grad-Shafranov equation in cap-cyclide coordinates: The Heun function solution", Mathematics **11**, 2087 (2023).
5. A.M. Ishkhanyan and V.P. Krainov, "Analytical description of cyclotron plasma resonances in monolayer graphene", Plasma Physics Reports **49**, 437-442 (2023).
6. A.M. Ishkhanyan and V.P. Krainov, "Conditionally exactly solvable Dirac potential, including pseudoscalar interaction", Physica Scripta **98**, 075229 (2023).
7. A.M. Ishkhanyan and V.P. Krainov, “Exact solution of the 1D Dirac equation for a pseudoscalar interaction potential with the inverse-square-root variation law”, Scientific Reports **13**, 13482 (2023). Q1
8. A.M. Ghazaryan, T.A. Ishkhanyan, and A.M. Ishkhanyan, "A new non-symmetric modification of the second Demkov-Kunike model", Lobachevskii J. Math. **44**, 2299–2305 (2023).
9. A.M. Ghazaryan, A.M. Ishkhanyan, and V.M. Red’kov, "A conditionally exactly solvable 1D Dirac pseudoscalar interaction potential", J. Contemp. Physics (Armenian Ac. Sci.) **58**, 212–219 (2023).
10. T.A. Ishkhanyan, A.M. Ishkhanyan, and C. Cesarano, "Solutions of a confluent modification of the general Heun equation in terms of generalized hypergeometric functions", Lobachevskii J. Math. **44**, 5258-5265 (2023).

Հրապարակումներ-2

11. A.M. Ishkhanyan and V.P. Krainov, “The Maslov index for composite power-law potentials: the case of the first Exton potential”, Annals of Physics **460**, 169554 (2024). Q1
12. A.V. Ivashkevich, V.M. Red’kov, AM. Ishkhanyan, "Non-relativistic approximation in the Pauli-Fierz theory for a spin 3/2 particle in the presence of external fields", Doklady of NAS of Belarus **68**, 18-27 (2024).
13. A.V. Ivashkevich, A.V. Chichurin, A.M. Ishkhanyan, and V.M. Red’kov, “Massless spin 2 field solutions with spherical symmetry: eliminating gauge degrees of freedom”, Modern Physics Letters A **39**, 2450065 (2024).
14. A.M. Ishkhanyan, "A quadratic transformation for a special confluent Heun function", Heliyon **10**, e36535 (2024). Q1
15. R. Droghei, C. Cesarano, and A. Ishkhanyan, “Examining the Mathematica algorithm for general Heun function calculation: a comparative analysis”, Commun. Appl. Ind. Math. **15**, 60-68 (2024).
16. A.M. Ishkhanyan, "Reverse-engineered exact control of population transfer in lossy nonlinear three-state systems", Photonics **11**, 1007 (2024).
17. A.M. Ishkhanyan, V.P. Krainov, “Klein-Gordon potentials solvable in terms of the general Heun functions”, Lobachevskii J. Math. **45**, 3538-3547 (2024).
18. A.M. Ishkhanyan, H.A. Matevossian, “On the behavior of solutions of the Cauchy problem for a hyperbolic equation with periodic coefficients. The principle of the limiting amplitude”, Lobachevskii J. Math. **45**, 3548-3558 (2024).
19. A.V. Ivashkevich, V.M. Red’kov, AM. Ishkhanyan, "Massless spin 2 field in 50-component approach: exact solutions with cylindrical symmetry, eliminating the gauge degrees of freedom", Proc. NAS of Belarus. Phys. Math. Seri. **60**, 132-145 (2024).
20. A.M. Ishkhanyan, "Precise control of population transfer in nonlinear lambda systems through reverse engineering", Proc. 7th Int. Conf. Optics, Photonics and Lasers, 187-188 (2024).

Հրապարակումներ-3

21. A.V. Ivashkevich, V.M. Redkov, A.M. Ishkhanyan, “Nonrelativistic approximation in the theory of a spin 2 particle with anomalous magnetic moment”, Axioms **14**, 35 (2025).
22. D. Melikdzhanian and A. Ishkhanyan, "Two-term Kummer function solutions of the 1D Schrödinger equation", Mod. Phys. Lett. A **40**, 2450224 (2025).
23. F. Giraldi, C. Cesarano, F. Crisanti, and A. Ishkhanyan, "Fourier-Bessel series solutions of the axisymmetrical Grad-Shafranov equation for plasma confinement", Math. Methods in the Applied Sciences **48**, 12974–12978 (2025). Q1
24. M.K. Margaryan, A.M. Ghazaryan, and A.M. Ishkhanyan, “Four-parametric generalization of the second Demkov-Kunike two-state model”, Annals of Physics **480**, 170106 (2025). Q1
25. A.V. Ivashkevich, V.M. Redkov, A.M. Ishkhanyan, “Spin 3/2 particle in the Coulomb field: the non-relativistic approximation”, Physics of Particles and Nuclei **56**(6), 1482–1488. (2025).
26. A.M. Ishkhanyan, H.A. Matevossian, and V.Yu. Smirnov, "On the Behavior of Solutions of the Mixed Problem for a Hyperbolic Equation with Periodic Coefficients on the Semi-Axis", Lobachevskii J. Math. **46**(6), 2804–2815 (2025).
27. T.A. Ishkhanyan, G.A. Petrosyan, and A.M. Ishkhanyan, "A Quadratic Transformation Identity for the Confluent Heun Function Involving Three Arbitrary Parameters", Lobachevskii J. Math. **46**(8), 4009-4011 (2025).
28. A.V. Ivashkevich, V.M. Red’kov, M.K. Margaryan, A.M. Ishkhanyan, “Nonrelativistic approximation for a spin-3/2 particle in combined electromagnetic and gravitational fields”, J. Contemp. Phys. **60**, xxx (2025).
29. V. Kisel, E. Ovsiyuk, A. Bury, A. Ivashkevich, V. Red’kov, A. Ishkhanyan, “New equation for a spin 1/2 particle with three additional characteristics in presence of electromagnetic and gravitational fields”, REPNAS **2**, xxx (2025).

Հրապարակումներ-4

1. A.M. Ishkhanyan, "Ethical Considerations in AI-Powered Language Technologies: Insights from East and West Armenian", AI and Ethics 5, 4135–4146 (2025). https://doi.org/10.1007/s43681-025-00716-6
2. A.M. Ishkhanyan, "The Sovereignty-Internationalism Paradox in AI Governance: Digital Federalism and Global Algorithmic Control", Discover Artificial Intellig. 5, 123 (2025). https://doi.org/10.1007/s44163-025-00374-x Q1
3. A.M. Ishkhanyan, "Governing AI Across Borders: Corporate Power, State Sovereignty, and Global Regulation", Digital Policy, Regulation and Governance XX xxx (2025). https://doi.org/10.1108/DPRG-03-2025-0057 Q2
4. A.M. Ishkhanyan, "Tragic Symbolism in Soviet Armenian Visual Art: The Legacy of Valentin Podpomogov", European Journal of Cultural Studies XX, xxx (2025). https://doi.org/10.1177/13675494251345364 Q1
5. A.M. Ishkhanyan, "Harmony in Flux: The Babajanian–Rozhdestvensky–Magomaev Triad and the Strange Attractor of Soviet Internationalism", Caucasus Survey XX, 1-24 (2025). https://doi.org/10.30965/23761202-bja10052 Q1

The general Heun equation

Equations of the Heun class

$$(p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3)\frac{d^2u}{dz^2} + (\gamma_1 + \delta_1 z + \varepsilon_1 z^2)\frac{du}{dz} + (\alpha_1 z - q_1)u = 0$$

$$P_3(z) = p_3 \cdot (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$$

$$z \to s_1 z + s_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_3(z) = 1 \cdot z(z-1)(z-a)}$$

1. General Heun equation

$$\boxed{\frac{d^2u}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\varepsilon}{z-a}\right)\frac{du}{dz} + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-a)}u = 0}$$

Riemann P-symbol:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & a & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & z \\ 1-\gamma & 1-\delta & 1-\varepsilon & \beta & \end{pmatrix}}$$

The four confluent Heun equations

2. Single-confluent Heun equation

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\varepsilon\right)\frac{du}{dz}+\frac{\alpha z-q}{z(z-1)}u=0$$

3. Double-Confluent Heun equation

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left(\frac{\gamma}{z^2}+\frac{\delta}{z}+\varepsilon\right)\frac{du}{dz}+\frac{\alpha z-q}{z^2}u=0$$

4. Bi-Confluent Heun equation

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left(\frac{\gamma}{z}+\delta+\varepsilon z\right)\frac{du}{dz}+\frac{\alpha z-q}{z}u=0$$

5. Tri-Confluent Heun equation

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left(\gamma+\delta z+\varepsilon z^2\right)\frac{du}{dz}+(\alpha z-q)u=0$$

The most singular (and hence the most complicated) are the double- and tri-confluent Heun equations

Տիգրան Իշխանյանը ներդրել է Հոյնի ֆունկցիաները Wolfram Mathematica ծրագրում:
Implementation of the Heun functions in Mathematica

S. Wolfram, "In less than a year, so much new: Launching version 12.1 of Wolfram Language & Mathematica", https://writings.stephenwolfram.com/2020/03/in-less-than-a-year-so-much-new-launching-version-12-1-of-wolfram-language-mathematica/, (2020).

T. Ishkhanyan, "From Sine to Heun: 5 New Functions for Mathematics and Physics in the Wolfram Language", https://blog.wolfram.com/2020/05/06/from-sine-to-heun-5-new-functions-for-mathematics-and-physics-in-the-wolfram-language/ (2020).

Ներգրավվածությունը նախագծում. A, B1-B3, C2-C7. Նաև՝ **Պենլևեի** ֆունկցիաների ներառումը Mathematica-ում

Conditionally exactly solvable Dirac potential, including $x^{1/3}$ pseudoscalar interaction

Artur Ishkhanyan
National Academy of Sciences of Armenia
Institute for Physical Research, Ashtarak-2, 0204 Armenia

1D stationary Dirac equation

$$E|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle = \left(\hat{K} + \hat{\Pi}\right)|\psi\rangle$$

$$\Pi = V(x)\sigma_0 + U(x)\sigma_1 + W(x)\sigma_2 + S(x)\sigma_3$$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pseudoscalar interaction: *V*=*U*=*S*=0

$$E\sigma_0\psi = \left(-ic\hbar\sigma_1 \frac{d}{dx} + W(x)\sigma_2 + mc^2\sigma_3\right)\psi$$

$$-ic\hbar\frac{d\psi_2}{dx}-iW\psi_2=(E-mc^2)\psi_1$$

$$-ic\hbar\frac{d\psi_1}{dx}+iW\psi_1=(E+mc^2)\psi_2$$

Expressing ψ_2 *from the second equation:*

$$\psi_2=\frac{iW\psi_1-ic\hbar\psi_1'}{E+mc^2}$$

Second-order equation for ψ_1 *:*

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2}+\frac{E^2-m^2c^4-c\hbar W'-W^2}{c^2\hbar^2}\psi_1=0$$

Effective
1D stationary Schrödinger equation

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E_S - V_S(x)\right)\psi = 0$$

Effective Energy

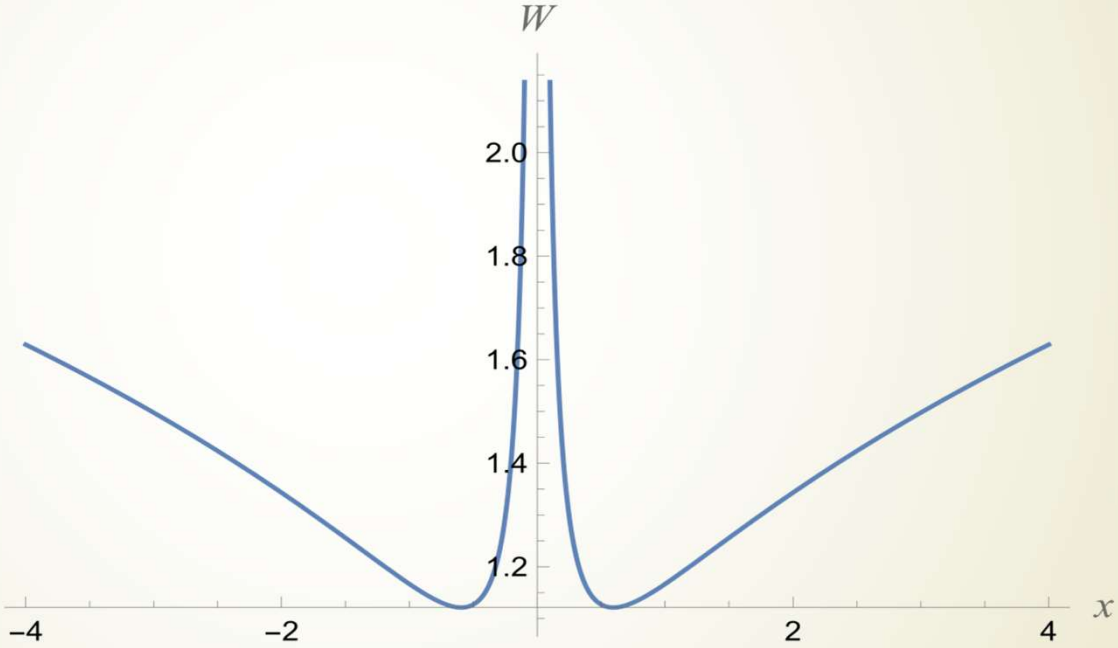
$$E_S = \frac{E^2 - m^2c^4}{2mc^2}$$

Effective Potential

$$V_S = \frac{W^2 + c\hbar W'}{2mc^2}$$

Dirac pseudoscalar potential

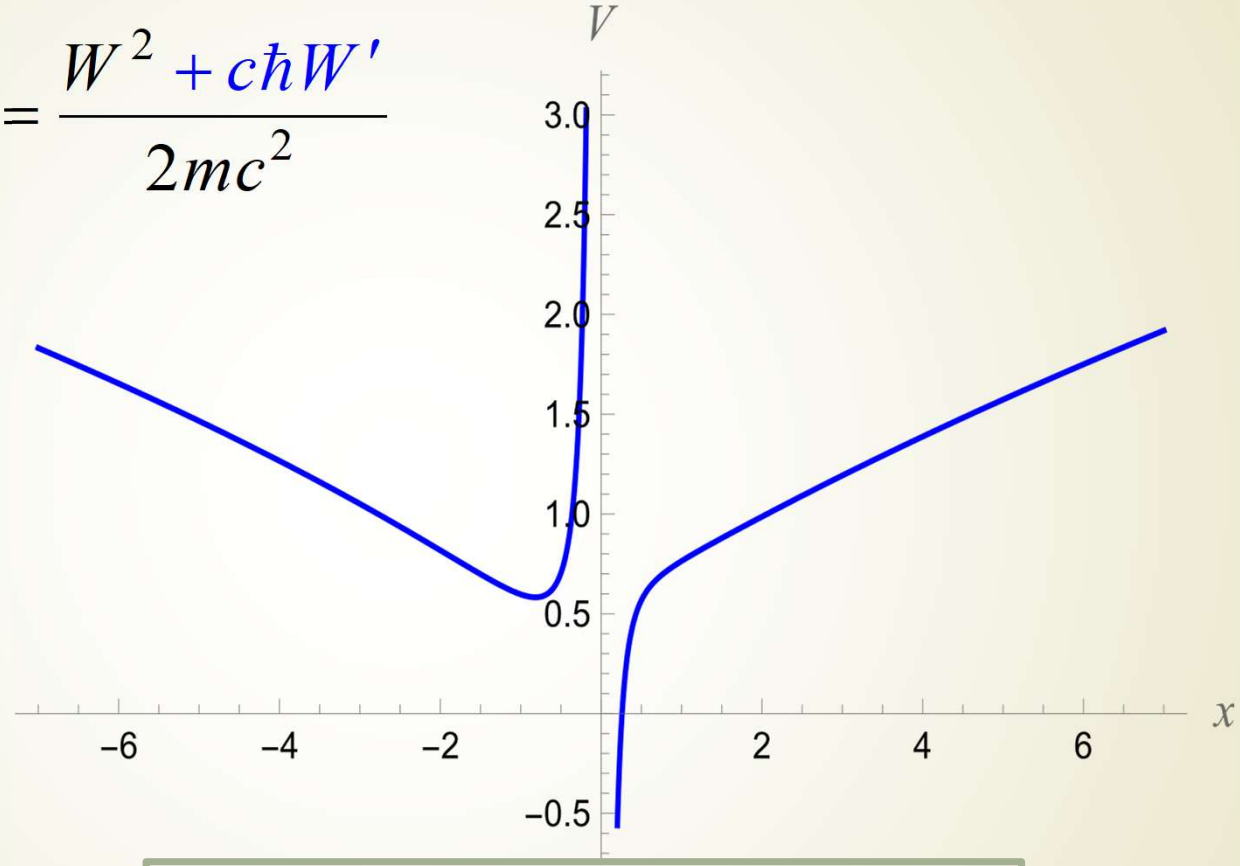
$$W = \frac{c\hbar / 6}{|x|} + W_2 |x|^{1/3}$$



Symmetric with respect to the origin

Effective Schrödinger potential

$$V_S = \frac{W^2 + c\hbar W'}{2mc^2}$$



Weakly singular asymmetric confining potential

- Solution for $x > 0$

For positive $x>0$ we have

$$W = \frac{c\hbar/6}{x} + W_2 x^{1/3}$$

Effective Schrödinger Potential

$$V_S = -\frac{5\hbar^2}{72mx^2} + \frac{W_2\hbar}{3mc\,x^{2/3}} + \frac{W_2^2}{2mc^2}x^{2/3}$$

Particular case of *the first Stillinger potential*

$$V_{S1} = -\frac{5\hbar^2}{72m\,x^2} + \frac{V_1}{x^{2/3}} + V_2 x^{2/3}$$

General solution of the Dirac-Schrödinger equation

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2}+\frac{E^2-m^2c^4-c\hbar W'-W^2}{c^2\hbar^2}\psi_1=0$$

$$\psi_1(x)=x^{1/6}e^{a-\left(z-\sqrt{2a}\right)^2/2}\cdot\left[C_1H_{a-1}\left(z-\sqrt{2a}\right)+C_2\cdot{}_1F_1\left(\frac{1-a}{2},\frac{1}{2},\left(z-\sqrt{2a}\right)^2\right)\right]$$

$$z=\sqrt{\frac{3W_2}{2c\hbar}}x^{2/3}\qquad a=\frac{3\left(E^2-m^2c^4\right)^2}{16c\hbar W_2^3}$$

Bound states on the interval $x \in (0, +\infty)$

$$\psi_{1\mathrm{R}}\Big|_{x\to+\infty} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$\psi_{1\mathrm{R}} = C_1 x^{1/6} e^{a-\left(z-\sqrt{2a}\right)^2/2} H_{a-1}\left(z-\sqrt{2a}\right)$$

$x \to 0$:

$$\psi_{1\mathrm{R}} = C_1\left(A_1 x^{1/6} + B_1 x^{5/6} + O\left(x^{3/2}\right)\right)$$

$$A_1 = H_{a-1}\left(-\sqrt{2a}\right)$$

$$B_1 = -\sqrt{\frac{3W_2}{2c\hbar}}\left(H_a\left(-\sqrt{2a}\right) + \sqrt{2a}H_{a-1}\left(-\sqrt{2a}\right)\right)$$

Second component of the wave function

$$\psi_{2\mathrm{R}} = C_1\left(\frac{A_2}{x^{1/6}} + B_2 x^{7/6} + O\left(x^{11/6}\right)\right)$$

$$A_2 = -\frac{2ic\hbar}{3\left(E + mc^2\right)} B_1$$

$$B_2 = -\frac{iW_2}{2\left(E + mc^2\right)}\sqrt{\frac{3W_2}{2c\hbar}}\left(H_a\left(-\sqrt{2a}\right) - \sqrt{2a}H_{a-1}\left(-\sqrt{2a}\right)\right)$$

- Schrödinger case

Exact energy spectrum equation for the Schrödinger case

$$A_1 = 0: \quad H_{a-1}\left(-\sqrt{2a}\right) = 0$$

Approximate spectrum

$$a \approx n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$E_n^{(0)} \approx \pm\sqrt{m^2c^4 + W_2^{3/2}\sqrt{\frac{16c\hbar}{3}n}}$$

Approximation of the Hermite function by the Airy functions in the *left transition region* $y \approx -\sqrt{2\nu+1}$

$$H_\nu(y) = A\left(\cos(\pi\nu)\,Ai(B) - \sin(\pi\nu)\,Bi(B)\right)$$

$$A = \frac{\sqrt[4]{\pi}\,2^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}}\,e^{\frac{y^2}{2}}\sqrt{\nu!}}{\sqrt[12]{\nu+1/2}}$$

$$B = -\sqrt[3]{2}\,\sqrt[6]{2\nu+1}\left(y+\sqrt{2\nu+1}\right)$$

Approximate equation for energy spectrum

$$f(a)\sin\left[\pi\left(a-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{a-1/6}\right)^{1/3}\right)\right]=0$$

***f*(*a*) never vanishes. Hence**

$$a-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{a-1/6}\right)^{1/3}=n,\quad n=1,2,3,\ldots$$

Approximate spectrum:

$$E_n^{(S)}\approx\pm\sqrt{m^2c^4+W_2^{3/2}\sqrt{\frac{16c\hbar}{3}\left(n+\frac{1}{6}\right)}}$$

Maslov index: $\gamma_{\mathrm{M}}=+\frac{1}{6}$

- Dirac case

Exact spectrum equation in the Dirac case

The wave function should not diverge. Hence

$A_2 = 0:$

$(B_1 = 0)$

$$H_a\left(-\sqrt{2a}\right) + \sqrt{2a}H_{a-1}\left(-\sqrt{2a}\right) = 0$$

Approximate energy spectrum:

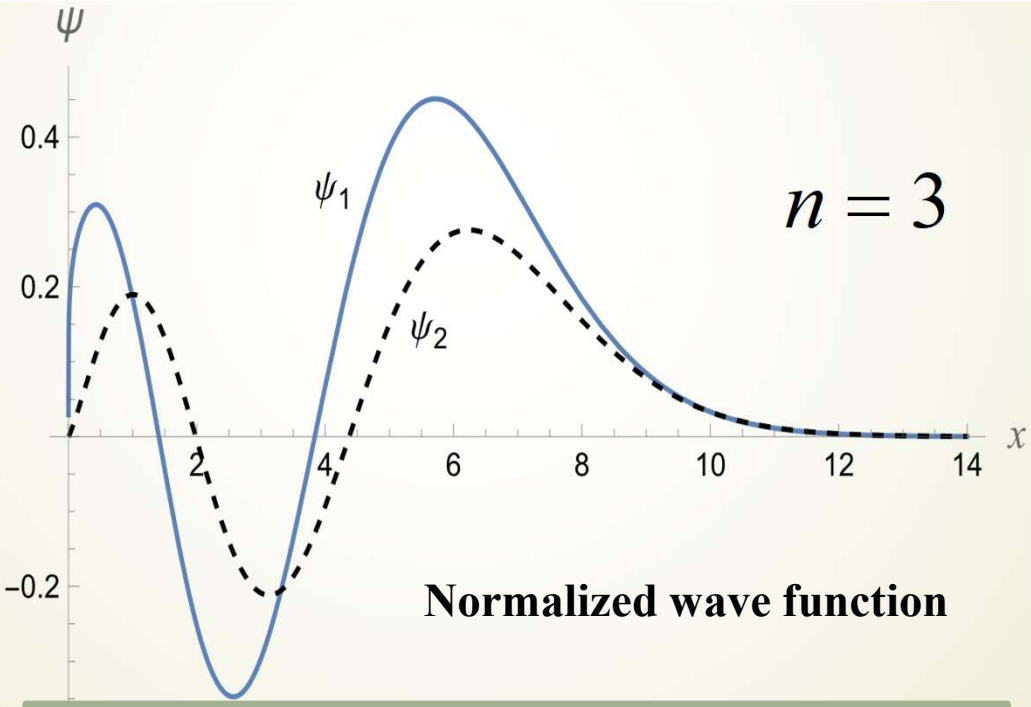
$$E_n \approx \pm\sqrt{m^2c^4 + W_2^{3/2}\sqrt{\frac{16c\hbar}{3}\left(n - \frac{1}{6}\right)}}$$

Now the *Maslov index* is

$$\gamma_{\mathrm{M}} = -\frac{1}{6}$$

Exact and approximate spectrums

n	1	2	3	4	5	6	7
E_n (exact)	1.773283	2.035270	2.212850	2.351215	2.466229	2.565510	2.653365
E_n (approx)	1.773139	2.035253	2.212852	2.351220	2.466234	2.565515	2.653370



Normalized wave function

Derivative of ψ_{1R} ***diverges!***

- Solution for $x < 0$

For negative $x<0$ we have

$$W = \frac{c\hbar/6}{-x} + W_2(-x)^{1/3}$$

Effective Schrödinger potential

$$V_S = \frac{7\hbar^2}{72mx^2} + \frac{W_2^2}{2mc^2}(-x)^{2/3}$$

This potential is *repulsive* near the singularity $x=0$

This is not a Stillinger potential.
This is a particular case of *the second Exton potential*

$$V_{E2} = \frac{7\hbar^2}{72mx^2} + \frac{V_1}{x^{4/3}} + \frac{9mV_1^2}{2\hbar^2 x^{2/3}} + V_2 x^{2/3}$$

Each of the two independent fundamental solutions can be written in terms of irreducible linear combinations of two Hermite or Kummer functions

$$\psi_1 = x^{-1/6} e^{a-\left(\sqrt{2a}-z\right)^2/2} \left(F(z) + \frac{F'(z)}{\sqrt{2a}} \right)$$

$$F = C_3 H_a\left(\sqrt{2a} - z\right) + C_4 \, {}_1F_1\left(-\frac{a}{2}; \frac{1}{2}; \left(\sqrt{2a} - z\right)^2\right)$$

$$z = \sqrt{\frac{3W_2}{2c\hbar}} (-x)^{2/3} \qquad a = \frac{3\left(E^2 - m^2c^4\right)^2}{16c\hbar W_2^3}$$

For the solution vanishing at negative infinity:

$$C_4 = f(a)C_3, \qquad f(a) = \frac{\sin(\pi a)}{\pi}\Gamma\left(-\frac{a}{2}\right)\Gamma(a+1)$$

Γ **is the Euler gamma function**

Exact eigenvalue equation: $\psi_1(0) = 0$

$$H_a\left(-\sqrt{2a}\right) + \sqrt{2a}H_{a-1}\left(-\sqrt{2a}\right) = 0$$

$$\psi_{1\mathrm{L}} = C_3(-x)^{-1/6} e^{a-\left(z-\sqrt{2a}\right)^2/2}\left(\sqrt{2a}H_{a-1}\left(z-\sqrt{2a}\right) + H_a\left(z-\sqrt{2a}\right)\right)$$

$$z = \sqrt{\frac{3W_2}{2c\hbar}}(-x)^{2/3}$$

- Matching at x=0

is problematic

In general, we have four constants: $C_{1,2,3,4}$

Two of these constants are washed out by the boundary condition at infinity: $C_2 = C_4 = 0$

A constant is determined by the normalization condition.

What about the remaining fourth constant?

Dirichlet condition does not work since always: $\psi_{1,2}(\pm 0) = 0$

Neumann condition does not work: $\psi'_{2\mathrm{L}}(0), \psi'_{1\mathrm{R}}(0) = \infty$

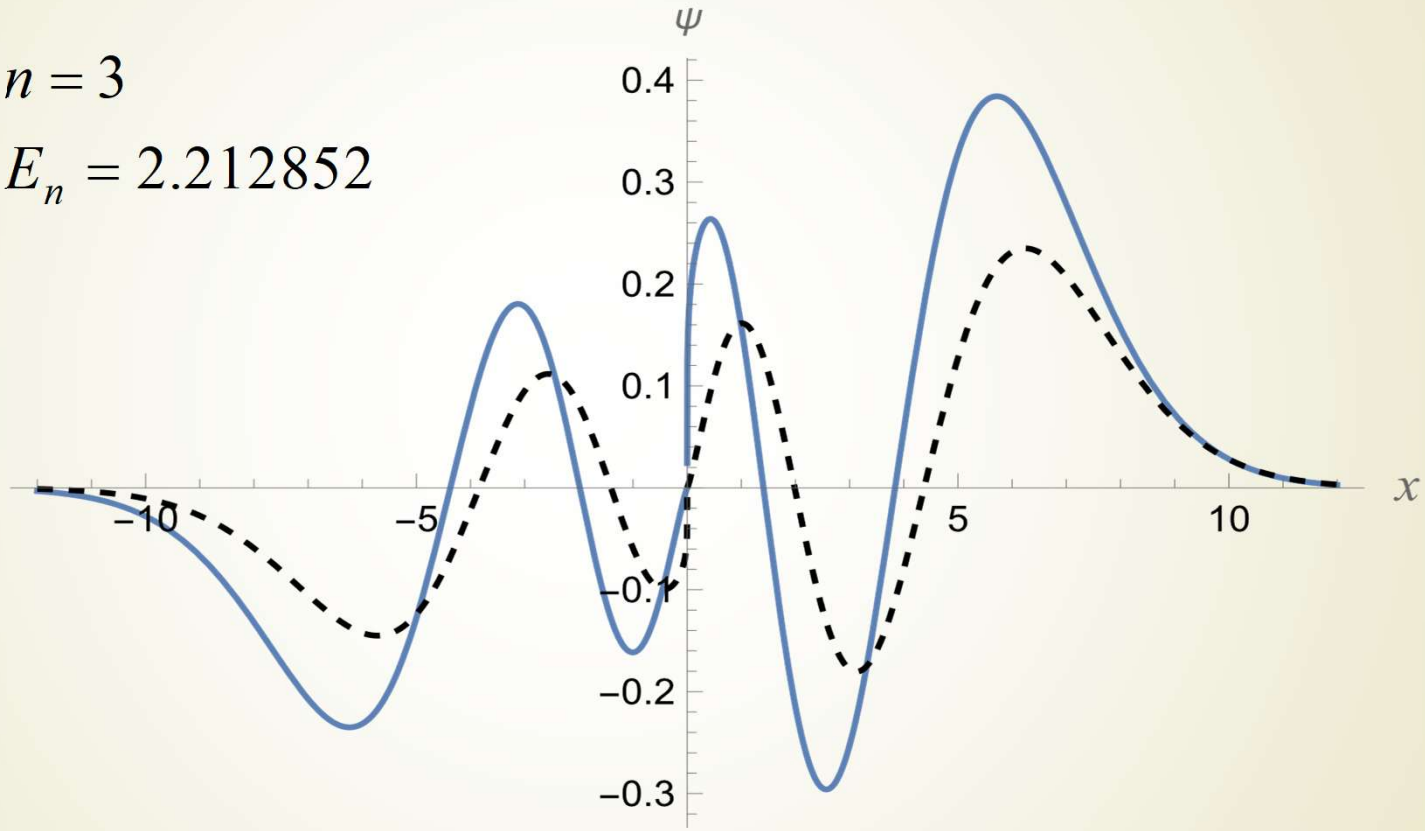
If $$\psi'_{1\mathrm{L}}(-x) / \psi'_{2\mathrm{R}}(+x)\Big|_{x \to +0} = -1$$

Then $$C_3 = \frac{2iB_2}{3\sqrt{2a}\,A_1} C_1$$

Normalized wave function

$n = 3$

$E_n = 2.212852$



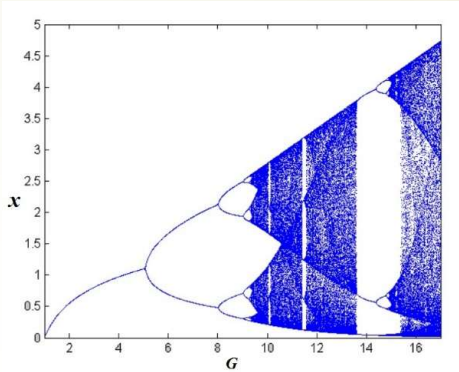
Derivatives of ψ_{2L}, ψ_{1R} ***diverge!***

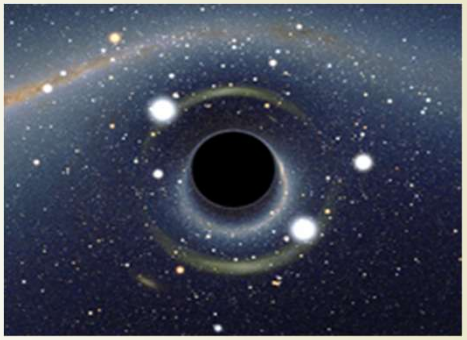
➢ Discussion

- Extensions of this potential, e.g., $W = \frac{c\hbar/6}{x} + \frac{W_1}{x^{1/3}} + W_2 x^{1/3}$
- Other *pseudoscalar* potentials, e.g., $W = W_0 + \frac{W_1}{\sqrt{x}}$
- Other potentials: *vector, scalar*
- 2D and 3D cases
- Other relativistic equations, e.g., *Klein-Gordon eq.*
- Other physical problems, e.g., *plasma physics*

4 շատ հավակնոտ խնդիրներ

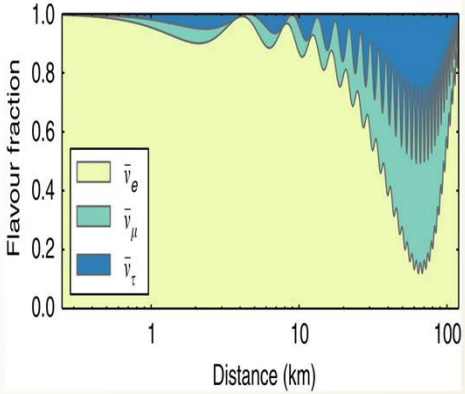
- B1. *Լոգիստական արտապատկերում* - Logistic map (*կիրառական մաթեմատիկա*)

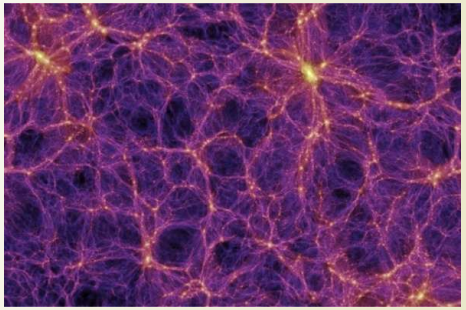




- C1 *Նեյտրինոյի տատանումներ* - Neutrino oscillation (տարրական մասնիկների ֆիզիկա)

- C8 *Սև խոռոչների ֆիզիկա* - Black hole (աստղաֆիզիկա)





- C9 *Տիեզերքի մեծամասշտաբ կառուցվածքը* - Large structure of the universe (տիեզերաբանություն)

ՀՀ ԳԱԱ Ֆիզիկական հետազոտությունների ինստիտուտ

Շնորհակալություն